Exercice 1 : Fonction rationnelle définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{si } -1 < x < 3 \text{ et } x \neq 2 \\ \sqrt{x - 2} + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1. **Domaine de définition et continuité**
   a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   b. Étudier la continuité de f en $x = -1$.
   c. Étudier la continuité de f en $x = 2$.
   d. Étudier la continuité de f en $x = 3$.
2. **Dérivabilité et interprétation géométrique**
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout x où f est dérivable.
   b. Étudier la dérivabilité de f en $x = -1$.
   c. Étudier la dérivabilité de f en $x = 3$.
   d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$.
3. **Théorème des valeurs intermédiaires et bijection**
   a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $]-2, 0[$.
   b. Étudier si f est injective sur $[-2, 1[$.
   c. Sur l'intervalle $I = [3, 5]$, f est-elle bijective ? Si oui, déterminer $f(I)$.
4. **Tableau de variation complet**
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur chaque intervalle.
   b. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 2^-} f(x), \quad \lim_{x \to 2^+} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

   c. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 2 : Fonction avec valeur absolue et partie entière

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} |x - 1| + x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } 1 \leq x < 4 \text{ et } x \neq 2 \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

1. **Continuité et dérivabilité**
   a. Étudier la continuité de g en $x = 1$.
   b. Étudier la continuité de g en $x = 2$.
   c. Étudier la continuité de g en $x = 4$.
   d. Pour $x < 1$, écrire $g(x)$ sans valeur absolue.
2. **Étude de la dérivabilité**
   a. Calculer $g'(x)$ pour $x < 1$, pour $1 < x < 2$ et pour $2 < x < 4$.
   b. Étudier la dérivabilité de g en $x = 1$.
   c. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en $x = 2$?

3. **Théorème des valeurs intermédiaires et bijection**
   a. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.
   b. Sur l'intervalle $J = [4, 6]$, montrer que g est bijective.
   c. Déterminer $g(J)$ et préciser le sens de variation de g^{-1} sur cet intervalle.
4. **Tableau de variation et limites**
   a. Étudier les variations de g sur chaque intervalle.
   b. Calculer :
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x), \quad \lim_{x\to 2} g(x), \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$
   c. Dresser le tableau de variation complet de g.
   d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 3$.