Exercice 1

Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

1. Si elles ont un sens, calculer les matrices $A \times B$, $B \times A$, $C \times D$, $D \times C$, $A \times E$, $C \times E$ et $C \times F$.
2. Calculer A^2, C^2 et C^3.
3. Calculer $\frac{C^2}{2}$ et $(I_3 - C)^3$.

Exercice 2

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a. Calculer A^2 et A^3.
   b. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Déduire la valeur de la matrice A^4.

Exercice 3

Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer e déterminant de B. Conclure.

b. Calculer $(B - 2I)^3$.

c. Déduire la matrice inverse B^{-1} de B.

Exercice 4

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A est inversible.
2. a. Calculer $A^3 - 4A^2 - 6A$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3.
   b. Donner alors la valeur de A^{-1}
3. Soit le système : $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x + 2z + 2y = -3 \\ x + 3y + z = 2. \end{cases}$
   a. Donner l'écriture matricielle de $\mathcal{S}$.
   b. Résoudre $\mathcal{S}$.

Exercice 8

Soit la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(\mathcal{A})$. Conclure.
2. a. Calculer $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{A}^3$ puis $\mathcal{A}^3 - 3\mathcal{A}^2 - 2\mathcal{A}$.
   b. En déduire que $\mathcal{A}$ est inversible et déterminer $\mathcal{A}^{-1}$.
   c. Résoudre alors le système linéaire S : $\begin{cases} -x + 3y + 4z = 2 \\ x - 2y - 3z = 4 \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$
   d. Retrouver les solutions de S par la méthode de **Cramer**.

Exercice 10

Une usine fabrique des lecteurs DVD des téléviseurs et des chaînes stéréo. Elle utilise dans la fabrication des ces appareils trois types des composants électroniques notés A, B et C.

a. La production d'un téléviseur nécessite 1 composant de type A, 4 de type B et 2 de type C.

b. La production d'un lecteur DVD nécessite 2 composants de type A, 5 de type B et 4 de type C.

c. La production dun chaîne stéréo nécessite 2 composants de type A, 2 de type B et 5 de type C.

La consommation journalière en composants électroniques est de 150 de type A, 300 de type B et 330 de type C. Soient a, b et c respectivement le nombre des téléviseur, de lecteurs DVD et de chaînes stéréo qui produit l'usine en un jour.

1. Montrer que a, b et c vérifient le système : $\mathfrak{S}$: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 150 \\ 2x + 5y + 2z = 300. \\ 2x + 4y + 5z = 330. \end{cases}$
2. Écrire la matrice $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{S}$ et montrer qu'elle est inversible.
3. On donne la matrice $\mathcal{N} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -17 & 2 & 6 \\ 16 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.
   b. Déduire la matrice inverse $\mathcal{M}^{-1}$.
   c. Trouver alors a, b et c.

Exercice 5

Soit a un réel non nul et la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice Q.
2. Montrer que $Q^2 - Q - 2I = 0$.
3. Donner alors Q^{-1}.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} \sqrt{3}y + 3z = 5 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}z = -5 \\ \frac{1}{3}x + \frac{3}{\sqrt{3}}y = 2. \end{cases}$

Exercice 6

On considère les matrices $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer M^2 et M^3.

b. Déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que :
$\mathrm{M}^3 + a\mathrm{M}^2 + b\mathrm{M} + c\mathrm{I} = 0$.

c. En déduire que M est inversible, et donner son inverse M^{-1}.

Exercice 7

Soient les deux matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. En calculant le déterminant de la matrice $\mathcal{A}$, dire pourquoi $\mathcal{A}$ est inversible.
2. a. Donner $\mathcal{A}^2$.

   b. On donne $\mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2 + 8\mathcal{A} + 6\mathcal{I}$.

   c. En déduire que $\mathcal{A}$ est inversible et donner sa matrice inverse $\mathcal{A}^{-1}$.
3. Soit le système $\mathcal{S} = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ 4x + 2y + z = 5. \end{cases}$

   a. Donner l'écriture matricielle de $\mathcal{S}$.

   b. Résoudre $\mathcal{S}$.

   c. Retrouver les solutions de $\mathcal{S}$ avec la méthode de *Cramer*.

Exercice 11

On considère les deux matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est inversible.
2. a. Vérifier que $\mathcal{A}^3 - 7\mathcal{A}^2 + 4\mathcal{A} - \mathcal{I}_3 = 0$.

   b. Déduire que $\mathcal{A}$ est inversible et donner sa matrice inverse $\mathcal{A}^{-1}$.
3. Utiliser ce qui précède pour résoudre le système $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$

Exercice 12

Soient les matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. a. Calculer le déterminant de $\mathcal{A}$ et déduire que $\mathcal{A}$ est inversible.

   b. Calculer la matrice $\frac{1}{6}\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ et déduire la matrice la matrice inverse $\mathcal{A}^{-1}$ de $\mathcal{A}$.
2. On considère la fonction numérique $\mathcal{F}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{F}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. où a, b et c sont trois réels. On suppose que $\mathcal{F}(1) = 0$, $\mathcal{F}(-1) = 0$ et $\mathcal{F}(2) = 10$.

   a. Montrer que a, b et c sont les solutions du système $\mathcal{S} : \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2. \end{cases}$

   b. Donner une écriture matricielle de $\mathcal{S}$.

   c. En déduire l'expression de $\mathcal{F}(x)$.

Exercice 13

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det \mathrm{A}$. Conclure.
2. Calculer A^2 puis $\mathrm{B} = 4\mathrm{A} - \mathrm{A}^2$ et ensuite le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.
3. Déduire que A l'nverse de A.
4. a. En utilisant ce qui précède résoudre le système S : $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5. \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

   b. Retrouver les solutions de S avec la méthode de Cramer.

Exercice 14

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Montrer que A est inversible

   b. Calculer A^{-1}
2. On considère le système $(S_1) = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

   a. Donner l'écriture matricielle de (S_1)

   b. Résoudre alors le système (S_1)
3. On donne le système $(S_2) = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \\ -2x - 5y - 3z = -2 \end{cases}$

   a. Montrer que le système et équivalent au système $(S_1) = \begin{cases} z = 1 - x - 2y \\ x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

   b. En déduire l'ensemble des solutions du système (S_2)