

## TAUX DE VARIATION – NOMBRE DÉRIVÉ $T_x = f'(x)$ :

Le taux de variation  $T_x$  indique l'inclinaison (coefficients directeur ou pente) de la tangente à la courbe représentative  $C_f$ , en toute abscisse  $x$ .

**La connaissance de  $T_x$  informe sur la croissance ou la décroissance de la fonction  $f$  lorsque  $x$  avance.**

Le calcul de  $T_x$  se fait en deux temps :

### I) **Taux de variation $T_{x,x'}$ de la sécante au graphe entre ses points d'abscisse $x$ et $x'$ :**

Le taux de variation  $T_{x,x'}$  est le coefficient directeur (pente) de la sécante  $S_{MM'}$  au graphe de  $f$ , qui passe par les points  $M$  et  $M'$  de ce graphe, d'abscisses respectives  $x$  et  $x'$ .

Soient  $M(x ; y)$  et  $M'(x' ; y')$  deux points de  $C_f$  :

Etant sur ce graphe, leurs ordonnées vérifient  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ .

**Le coefficient directeur (pente ou taux de variation) de la sécante  $S_{MM'}$  est**

$$T_{x,x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

**Sauf cas particulier, il est toujours possible et même indispensable, de simplifier  $x' - x$  entre le numérateur et le dénominateur du taux de variation de  $S_{MM'}$ .**

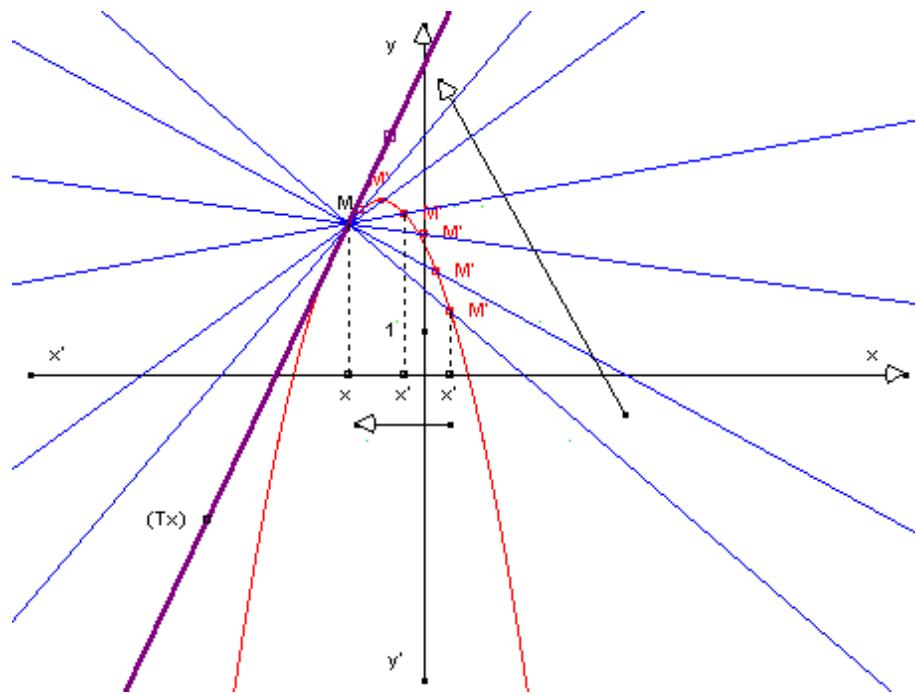
Après avoir simplifié, on fait évoluer la sécante  $S_{MM'}$  vers la tangente  $T_M$  en rapprochant le point  $M$  du point  $M'$ , jusqu'à se confondre avec ce dernier.

Pour ce faire, on rapproche  $x'$  de  $x$ , puis on les confond.

**L'expression obtenue, qui ne contient plus que des termes  $x$  est appelée *Taux de Variation de  $f$  en  $x$***   
**Elle exprime le coefficient directeur  $T_x$  de la tangente en  $x$  à  $C_f$ .**

**$T_x$  est noté  $f'(x)$ , nombre dérivé de  $f$  en  $x$ .**

$$T_a = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$



Lorsque  $x'$  se rapproche de  $x$  on voit les sécantes  $S_{MM'}$  remonter vers la tangente  $T_M$ . (qui est notée  $T_x$ ).

**Exemple :** Calcul du *Taux de Variation* de  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

### 1/ Taux de variation de la sécante $S_{MM'}$ :

$$T_{x,x'} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{(-x'^2 + 3x' + 4) - (-x^2 + 3x + 4)}{x' - x} = \frac{-(x'^2 - x^2) + 3(x' - x)}{x' - x}.$$

On simplifie par  $x' - x$  :  $T_{x,x'} = -(x' + x) + 3$ , **pente de la sécante  $S_{MM'}$  (coefficient directeur)**.

On remarquera qu'en donnant des valeurs quelconques à  $x$  et à  $x'$ , on obtient les  *pentes* de toutes les sécantes possibles au graphe.

Ainsi la sécante passant par les points du graphe d'abscisses  $x = -2$  et  $x' = +3$  a pour coefficient directeur :  $T_{-2,+3} = -(3 - 2) + 3 = +2$ .

### 2/ Taux de variation $T_x$ (nombre dérivé $f'(x)$ ) de la tangente au graphe en son point d'abscisse $x$ .

La tangente au graphe, en son point d'abscisse  $x$ , est la position limite des sécantes  $S_{MM'}$ , lorsque le deuxième point d'intersection  $M'$  revient sur  $M$ , jusqu'à se confondre avec lui.

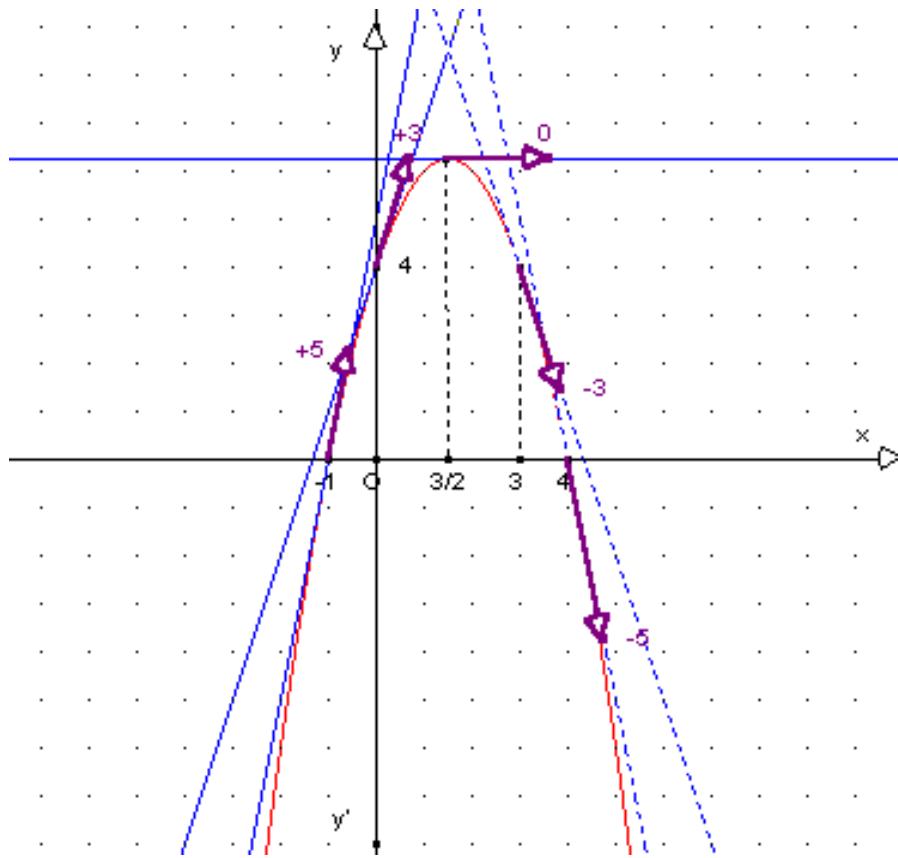
On passe du coefficient directeur de la sécante  $S_{MM'}$  à celui de la tangente  $T_M$ , en confondant  $x'$  avec  $x$ .

**$T_x = -2x + 3$ , pente de la tangente  $T_M$  au point de  $C_f$  d'abscisse  $x$ .**

(*Taux de variation* de  $f$  en  $x$ )

Notation en dérivée :

$f'(x) = -2x + 3$ , qui indique le coefficient directeur de la tangente  $T_M$  en  $M$ , d'abscisse  $x$  à la courbe représentative  $C_f$ .



Exemples :  $f'(x) = -2x + 3$  pente de la tangente  $T_x$

Pour  $x = -1$ , on obtient  $f'(-1) = +5$ , la tangente en  $x = -1$  monte de 5 en avançant de 1.

Pour  $x = 0$ , on obtient  $f'(0) = +3$ , la tangente en  $x = 0$  monte de 3 en avançant de 1.

Pour  $x = 3/2$ , on obtient  $f'(\frac{3}{2}) = 0$ , la tangente en  $x = \frac{3}{2}$  est horizontale.

Pour  $x = 3$ , on obtient  $f'(3) = -3$ , la tangente en  $x = 3$  descend de 3 en avançant de 1.

Pour  $x = 4$ , on obtient  $f'(4) = -5$ , la tangente en  $x = 4$  descend de 5 en avançant de 1.

## II ) SENS DE VARIATION de $f$ :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$  est localement *croissante* autour de  $x$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$  est localement *décroissante* autour de  $x$

$T_x = f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$  présente un *Extremum* (Maximum ou minimum) en  $x$   
ou un point d'inflexion (la tangente est alors horizontale)

**Il faut chercher les éventuels *extrema* (sommets) et donner le signe du *taux de variation* suivant  $x$ , afin de dresser le tableau de variations.**

a/ Recherche de l'extremum de  $C_f$ . C'est le point du graphe où la *tangente est de pente nulle*.

$$T_x = f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = +\frac{3}{2}.$$

L'extremum est situé sur  $C_f$ , donc son ordonnée vérifie  $y = f(x) = f(\frac{3}{2}) = +\frac{25}{4}$ .

**L'extremum est  $E(\frac{3}{2}; \frac{25}{4})$ .**

b/ Signe du Taux de Variation (Dérivée) :

S'il est positif,  $f(x)$  croit avec  $x$ , sinon  $f(x)$  décroît lorsque  $x$  croît.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ . **La fonction est croissante pour  $x < \frac{3}{2}$ , décroissante au delà.**

### III/ TABLEAU DE VARIATION

C'est le résumé des résultats précédents. Il exprime l'évolution des *ordonnées (hauteurs)*  $y = f(x)$  lorsque l'abscisse  $x$  avance de  $-\infty$  vers  $+\infty$ .

$X$	- $\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x) = T_x$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\downarrow$

### IV/ TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE (Graphe) :

Le tableau de variations inspire le graphe précédemment tracé, dont on peut calculer quelques points, qui vérifient  $y = f(x)$ .

On peut savoir :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$